Polynômes de BERNSTEIN

Sergei Natanovic BERNSTEIN est né en 1880 et est mort en 1968.

1) Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour n entier naturel non nul donné , le n-ième polynôme de BERNSTEIN associé à f est :

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}.$$

2) L'identité $\sum_{k=0}^{n} C_n^k(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k}=nX(1-X)$.

a) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x\in[0,1],\ f(x)=1$.
Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x)=1$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k(1-X)^{n-k}=(X+(1-X))^n=1.$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k(1-X)^{n-k}=1.$$

b) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x\in[0,1],\ f(x)=x$.
Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x)=x$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k}.$$

1er calcul. Pour $1\leq k\leq n$,

$$\frac{k}{n}C_n^k=\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}B_n(f)&=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} X^k(1-X)^{n-k}\\&=X\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)}=X\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} X^{l}(1-X)^{(n-1)-(l)}=X(X+(1-X))^{n-1}=X.\end{aligned}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k}=X.$$

2 ème calcul. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-Y)^{n-k}&=\frac{X}{n}\sum_{k=1}^{n} C_n^k kX^{k-1}(1-Y)^{n-k}\\&=\frac{X}{n}\frac{d}{dX}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k(1-Y)^{n-k}\right)=\frac{X}{n}\frac{d}{dX}\left((X+1-Y)^n\right)=X(X+1-Y)^{n-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k(1-Y)^{n-k} = X(X+1-Y)^{n-1}.$$

En particulier, quand $Y = X$, on retrouve le résultat précédent .

c) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x(x-1)$.
Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) = x(x-1)$, alors pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k(1-X)^{n-k} = -\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k(1-X)^{n-k}.$$

1er calcul. Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$k(n-k)C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!} = n(n-1)C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
B_n(f) &= -\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^k(1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{(n-2)-(k-1)} \\
&= -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} X^{k}(1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X)(X+1-X)^{n-2} \\
&= -\frac{n-1}{n}X(1-X).
\end{aligned}$$

L'égalité précédente restant vraie pour $n = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k(1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X).$$

2 ème calcul.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k(1-Y)^{n-k} &= -\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k(1-Y)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n^2}X(1-Y)\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k(1-Y)^{n-k}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}X(1-Y)\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial Y}((X+1-Y)^n)\right) = -n(n-1))\frac{1}{n^2}X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2} \\
&= -\frac{n-1}{n}X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k(1-Y)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}.$$

En particulier, quand $Y = X$, on retrouve le résultat précédent .

d) Calcul de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k(1-X)^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k(1-X)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 X^k(1-X)^{n-k} - 2nX\sum_{k=0}^{n} kC_n^k X^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k(1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-n) X^k(1-X)^{n-k} - n(2X-1)\sum_{k=0}^{n} kC_n^k X^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2 \\
&= n^2\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k(1-X)^{n-k} - n^2(2X-1)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}C_n^k X^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2
\end{aligned}$$

et donc les résultats de a), b) et c)

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = n^2\left(-\frac{n-1}{n}X(1-X)-(2X-1)X+X^2\right) = n^2(-\frac{1}{n}X^2+\frac{1}{n}X) = nX(1-X).$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X).}$$

3) Convergence uniforme de la suite des polynômes de Bernstein

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

a) Une majoration de $|f(x) - B_n(f)(x)|$.
Soit x un réel de $[0,1]$ et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\right| \\
&= \left|f(x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\right| \text{ (d'après 1)a))} \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

b) Pourquoi l'expression précédente est-elle petite ?

Tout d'abord, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$ est une expression bornée uniformément en x.

Ensuite, pour x donné et pour des k tels que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right|$ est petit, $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|$ est petit. Pour les k tels que $\dfrac{k}{n}$ est assez éloigné de x et décrivant donc un sous-ensemble J de $[\![0,n]\!]$, $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|$ est bornée uniformément en x et il n'y a qu'à espérer que $\displaystyle\sum_{k\in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ soit petit. Mais là, on dispose de

$$\sum_{k\in J} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}\ldots$$

c) Soit ε un réel strictement positif.
f est continue sur le segment $[0,1]$ et est donc d'une part bornée sur ce segment, et d'autre part uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Par suite, il existe un réel M tel que pour tout x de $[0,1]$, $|f(x)| \leq M$ et il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

d) Soient n un entier naturel non nul et x un réel de $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}}^{n} C_n^k \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\substack{k=0\\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + 2M\sum_{\substack{k=0\\ |x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{\substack{k=0\\ |x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n}\text{(d'après 1)),}
\end{aligned}
$$

(dans la deuxième somme, l'inégalité $\left|x-\frac{k}{n}\right| \geq \alpha$ s'écrit encore $1 \leq \frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2}$) et donc :

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\alpha^2}\frac{1/4}{n} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2},$$

(si $x \in [0,1]$, $x(1-x) = \frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$). En résumé, $\varepsilon > 0$ strictement positif ayant été donné, on a montré que :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x)-B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}.$$

Or, $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}$ tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $|f(x)-B_n(f)(x)| < \varepsilon$.
On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x)-B_n(f)(x)| < \varepsilon,$$

et donc que

La suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ des polynômes de Bernstein converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4) Le théorème de Weirstrass.

D'après 2), toute fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes.
Plus généralement, soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = f((b-a)x+a).$$

Comme la fonction $x \mapsto (b-a)x+a$ est un homéomorphisme de $[0,1]$ sur $[a,b]$ (de réciproque la fonction $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$) et que f est continue sur $[a,b]$, g est continue sur $[0,1]$. Il existe alors une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$.
Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[a,b]$, posons

$$P_n(x) = Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour x dans $[0,1]$ et $n \geq n_0$, $|g(x)-Q_n(x)| < \varepsilon$. Mais alors, pour $n \geq n_0$ et x dans $[a,b]$,

$$|f(x)-P_n(x)| = \left|g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)-Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

car $\frac{x-a}{b-a}$ est dans $[0,1]$.

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall x \in [a, b],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

et donc la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. D'où le :

Théorème de WEIRSTRASS. Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.

5) Peut-on généraliser à $\mathbb{R}$?

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Nous allons montrer que f est nécessairement un polynôme.

D'après le critère de CAUCHY uniforme, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_p(x) \leq 1,$$

et en particulier pour $n \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1.$$

Pour $n \geq n_0$, le polynôme $P_n - P_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$ et donc constant. Par suite,

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0).$$

Quand n tend vers $+\infty$ à x fixé, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P_{n_0}(x) - P_{n_0}(0) + f(0).$$

On a montré que :

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, f est nécessairement un polynôme.

Ce résultat montre que les séries entières usuelles de rayons infini (de somme e^x ou $\cos x$ ...) ne sont pas uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

